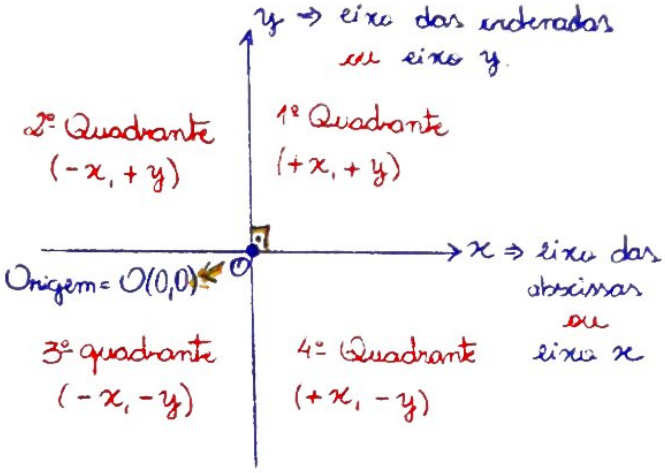
Resumo de Geometria Analítica
(Aula 1)

* Coordenadas Cartesianas



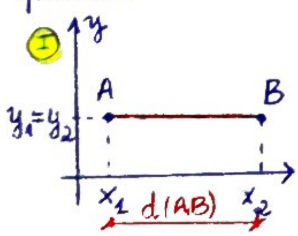
→ O plano cartesiano é composto por dois eixos (eixo x e eixo y) perpendiculares (ou sejam, que formam um ângulo de 90° graus). O "encontro" desses dois eixos resultam na Origem, representada por O(0,0). O plano cartesiano é dividido em 4 quadrantes como mostra a figura acima.

* Distância entre dois pontos

→ A distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta que une esses pontos.

Essa distância é calculada das seguintes formas:

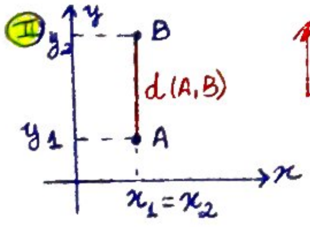
I



- Se $y_1 = y_2$, o segmento de reta que une os pontos A e B é paralelo ao eixo x.

$$\boxed{d(A,B) = (x_2 - x_1)}$$

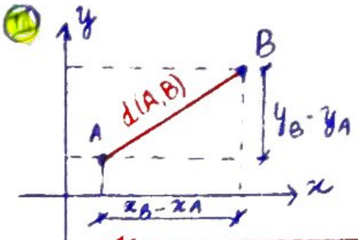
II



$$\boxed{d(A,B) = (y_2 - y_1)}$$

↳ Se $x_1 = x_2$, então $d(A,B) \,//\,$ ao eixo y.

III

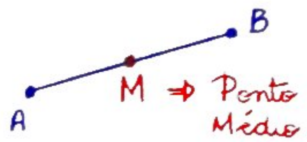


Seja $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

* Ponto Médio

→ O ponto médio divide um segmento de reta exatamente no meio.



Encontramos o ponto médio através da fórmula:

$$\boxed{M = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

* Coeficiente Angular

→ O coeficiente angular de uma reta é a inclinação dela em relação ao eixo x. Em termos trigonométricos, o coeficiente angular da reta é o valor real que expressa a tangente. Representamos o coeficiente angular pela letra m.

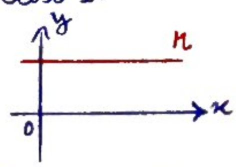
$$m = \operatorname{tg}\alpha$$

Calculamos m do seguinte modo:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Existem diferentes casos para o coeficiente angular: (Considerando: $0° \leq \alpha < 180°$)

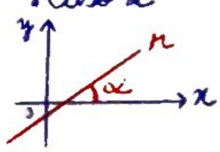
- Caso 1:



Para $\alpha = 0°$, $m = 0$

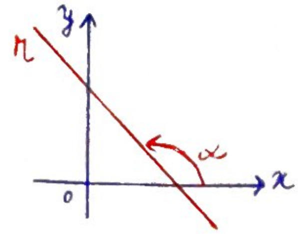
$(m = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}0° \Rightarrow m = 0)$

- Caso 2



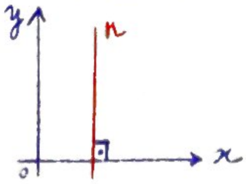
Para $0° < \alpha < 90°$, $m > 0$

• Caso 3:



Para $90° < \alpha < 180°$, $m < 0$.

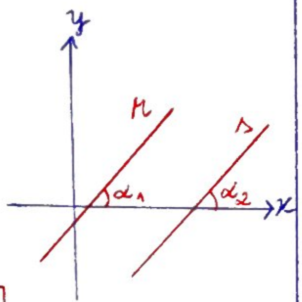
• Caso 4



Para $\alpha = 90°$, a tangente de α não é definida. Logo, quando $\alpha = 90°$ dizemos que a reta não tem inclinação.

• Retas Paralelas:

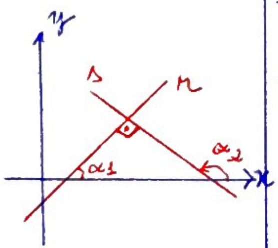
→ Duas retas, r e s, são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais:



$\boxed{\text{Se } m_r = m_s, \text{ então } r \,//\, s.}$

• Retas Perpendiculares:

→ Duas retas são perpendiculares se tem os coeficientes angulares opostos e inversos (ou se formam um ângulo de 90°).



$$m_r = \frac{-1}{m_s}, \text{ com } m_r \text{ e } m_s \neq 0$$

Logo, $\boxed{r \perp s, \text{ se e somente se, } m_r = \frac{-1}{m_s}}$

* Equação Fundamental da Reta

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

→ Formas da equação da reta.

* Equação Geral da Reta

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

onde: a, b e c são ~~ctes~~ constantes e a e b não são nulos simultaneamente. (ou seja, se $a = 0$, então $b \neq 0$ e vice-versa)

* Equação Reduzida da Reta

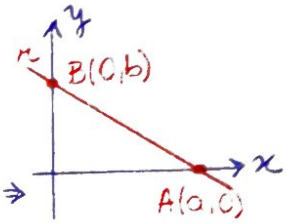
$$\boxed{y = mx + n}$$

onde: m = coeficiente angular;
n = coeficiente linear

* Equação Segmentária da Reta

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

→ Obs.: Esta reta não passa pela origem $O(0,0)$ e intersecta os eixos nos pontos $(a,0)$ e $(0,b)$ como mostra a figura ao lado ⇒



* Equação Paramétrica da Reta

→ As equações paramétricas da reta são da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}}$$

onde: $f(t)$ e $g(t)$ são funções do 1º grau e, t é chamado de parâmetro dessa equação.

Lista de Exercício: Geometria Analítica 1

Questão 1: Um ponto $P(a,2)$ é equidistante dos pontos $A(3,1)$ e $B(2,4)$. Calcule a abscissa do ponto P.

• Resolução:

Como P é equidistante, ou seja, tem a mesma distância em relação ao ponto A e ao ponto B, então podemos dizer que a distância de A para P é igual a distância de P para B:

$$d(P,A) = d(P,B)$$

Sabemos que a distância entre dois pontos é dada por:

$$d(Q,R) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

assim, calcularemos a distância entre P e A, e logo depois, entre P e B.

Ⅰ $d(P,A)$

$$d(P,A) = \sqrt{(3-a)^2 + (1-2)^2}$$

$$d(P,A) = \sqrt{(3-a)^2 + (-1)^2}$$

$$d(P,A) = \sqrt{(3-a)^2 + 1} \quad ①$$

Obs.: Os valores das coordenadas de A, B e P são dadas na questão
$A=(3,1)$; $B(2,4)$ e $P(a,2)$

Ⅱ $d(P,B)$

$$d(P,B) = \sqrt{(2-a)^2 + (4-2)^2}$$

$$d(P,B) = \sqrt{(2-a)^2 + (2)^2}$$

$$d(P,B) = \sqrt{(2-a)^2 + 4} \quad ②$$

Como dito anteriormente, $d(P,A) = d(P,B)$, logo, igualando os resultados ① e ②, temos:

$$d(P,A) = d(P,B)$$

$$\sqrt{(3-a)^2 + 1} = \sqrt{(2-a)^2 + 4}$$

Para eliminarmos as raízes, vamos elevar os dois lados da igualdade ao quadrado:

$$\left(\sqrt{(3-a)^2 + 1}\right)^2 = \left(\sqrt{(2-a)^2 + 4}\right)^2$$

Dessa forma, eliminamos as raízes e obtemos:

$$\underbrace{(3-a)^2}_{*} + 1 = \underbrace{(2-a)^2}_{**} + 4$$

Agora vamos desenvolver os termos * e **

$$(3^2 - 2.3.a + a^2) + 1 = (2^2 - 2.2.a + a^2) + 4$$

$$9 - 6a + a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2 + 4$$

$$10 - 6a + a^2 = 8 - 4a + a^2$$

Igualando a equação a zero, tem-se

$$10 - 6a + \cancel{a^2} - 8 + 4a - \cancel{a^2} = 0$$

$$10 - 8 - 6a + 4a = 0$$

$$2 - 2a = 0$$

$$-2a = -2 \quad .(-1)$$

$$2a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Portanto, a abscissa do ponto P é $a=1$;
Temos que o ponto P é: $P(a,2) \Rightarrow P(1,2)$.

—"—"—"—"—

Questão 2: Determine o ponto médio do segmento de reta formado pelos pontos $A(3,-2)$ e $B(-1,-6)$.

• Resolução:

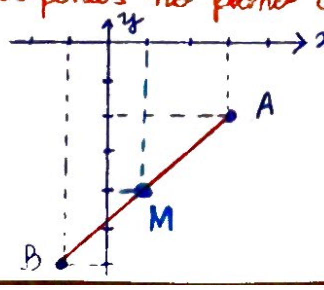
Aqui, aplicaremos a fórmula do ponto médio:

$$M = \left(\frac{(x_A + x_B)}{2}, \frac{(y_A + y_B)}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{3 + (-1)}{2}; \frac{-2 + (-6)}{2}\right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-2-6}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{2}{2}, \frac{-8}{2}\right) \Rightarrow \boxed{M = (1,-4)}$$

Para melhor visualização, podemos esboçar os pontos no plano cartesiano.

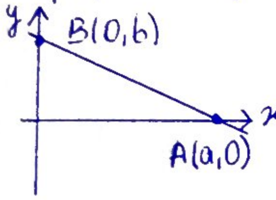


Questão 3: Determine a forma segmentária da reta com equação geral $5x+3y-7=0$.

• Resolução:

Sabemos que a equação segmentária da reta é da seguinte forma:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, de modo que, graficamente a equação nos fornece:



⇐ Caso geral!

Dito isto, a é o valor em que a reta corta o eixo das abscissas (o eixo x). Portanto, se ela toca o eixo x, isso implica que nesse ponto, y vale 0. É como se tivéssemos um ponto desta forma:

$(x_1, y_1) = (a, 0)$ → onde cruza o eixo x.

Substituindo esse valor na equação geral dada na questão, temos:

$5x+3y-7=0$; onde $x=a$ e $y=0$.

$5.a+3.0-7=0$

$5a+0-7=0$

$5a=7$ ... → $a=\frac{7}{5}$

Já o valor de b representa o local em que a reta corta o eixo das ordenadas (ou eixo y). Como mostra o gráfico. Dessa forma, o ponto que corta esse eixo é dado por:

$(x_2, y_2) = (0, b)$ ⇒ Assim: $x_2=0$, $y_2=b$

Substituindo na equação geral, encontramos o valor de b.

$5x+3y-7=0$

$5.0+3.b-7=0$

$0+3b-7=0$ → $3b=7$ → $b=\frac{7}{3}$

Agora que temos os valores de a e de b, podemos substituir na equação segmentária da reta.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{\frac{7}{5}}+\frac{y}{\frac{7}{3}}=1$$

→ Como o denominador é uma divisão, nós podemos invertê-lo e passar multiplicando

$$x.\frac{5}{7}+y.\frac{3}{7}=1$$

$$\boxed{\frac{5x}{7}+\frac{3y}{7}=1}$$

→ Esta é a forma segmentária da equação da reta.

Questão 4 (Desafio): Seja o triângulo de vértices A(1,0,-2), B(2,-1,-6) e C(-4,5,2). Estabelecer as equações da reta suporte da mediana do triângulo ABC relativa ao lado BC.